

教育数学:

# 在微课程重构中 落实数学核心素养

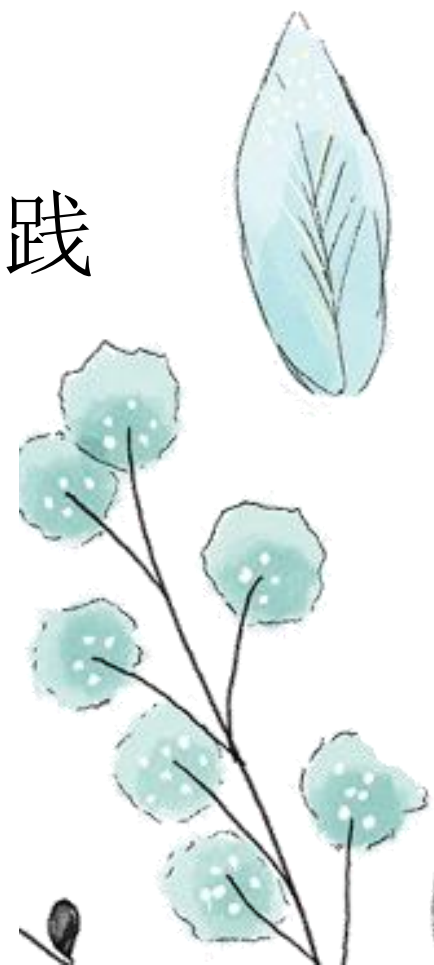


# CONTENTS

01 引言

02 微课程重构的实践

03 结语



# PART ONE

## 1 引言



# 1 引言

➤ 数学教育既关注“数学本质”，又关注“教育形态”，并与MKT建立关联

维度	描述	与MKT的对应
数学本质	数学内容的数学本质和科学价值， 包含理论背景、现实背景、文化背景等	共同的内容知识(CCK) 横向的内容知识(HCK)
数学展现	数学内容的教育表现形式，可以从问题驱动、抽象形成、直观论证、思想方法等角度来考虑	特殊的内容知识(SCK)
认知特征	学生学习该内容时所必须遵循的认知规律，包括认知发展进程、认知困难和常见错误等，以及针对认知困难设计的坡度式提问和预防认知错误的教学策略	内容与学生的知识(KCS) 内容与教学的知识(KCT)
课程目标	课程标准对该单元数学内容的要求，涉及教学时间安排、内容理解水平、内容考核要求等	课程的知识(KCC)

# 1 引言



## 开展教育数学研究

- ◆ 从根本上杜绝“去数学化”的数学教育研究，有必要开展教育数学研究。
- ◆ MKT理论的精要在于把学科内容、学情、课程等紧密融铸为一体，十分强调吃透在学科内容上的基础上产生教育见解。



## 重构数学课程

- ◆ 教育数学主张对已成型的数学课程进行重构，让数学变得更容易。
- ◆ 如“**重构三角，全局皆活**”不但在数学理论已经成熟，也已经进入了教学实践，取得了明显的效果。



## 研究范围

- 教育数学的上述工作是针对**初中几何**而展开，对初中代数的相关研究还没有充分展开。
- 对已成型的数学课程进行重构，需要相当大的功力，在数学理论取得成功之后，是否能进入教学实践，也要有相当大的魄力。



# 1 引言

01

——退而求其次：**汲取教育数学的精髓——重构课程**——而开展教育数学研究。  
——如，针对某一专题内容，**进行微课程重构**，一则即使数学功力不强也能为之；  
二则开展教学实践也不会有什么阻力。

02

表2：初中数学内容学年分布

	七年级		八年级		九年级	
	七上	七下	八上	八下	九上	九下
内容	4	6	5	5	5	4
数	1	1				
式	1	1	2	1		
方程	1	2			1	
函数		1		1	1	2
几何	1	1	3	2	2	2
概率统计		1		1	1	

# PART TWO

## 2 微课程重构的实践

选题

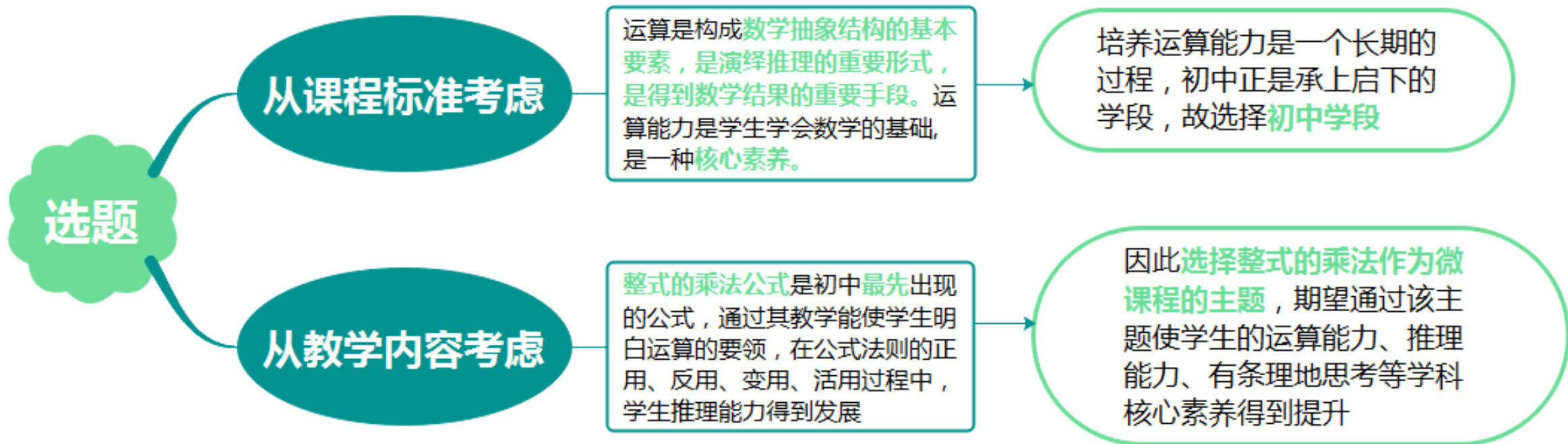
重构

实践

推广



## 2.1 微课程重构——选题





## 2.2 微课程重构的教育数学解读

教育数学的研究有  
一条科学的程序：

关注数学，挖掘教育价值

走向教育实践

反思总结

## 2.2.1 关注数学

01

寻找公式的**几何直观背景**。用面积法处理数学,一直是教育数学的主张。

02

现在有一块长方形土地,其长由长分别为 $m, n$ 的两条线段组成,其宽由长分别为 $a, b$ 的两条线段组成。求这块长方形土地的面积,显然,

$$(a + b)(m + n) = am + an + bm + bn.$$

如图1所示:

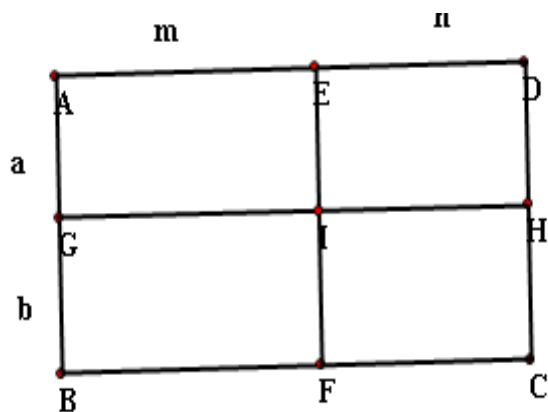


图1 乘法公式示意图

## 2.2.1 关注数学

数学公式的一般性与特殊性是一对矛盾。在数学研究中，得到一个重要公式后，往往会通过特殊化的处理方法得到而得到一些重要的公式。

### 1 特例很重要

如，得到了两角和的正弦之后，通过特殊化，得到二倍角公式。由特例在结构上有些鲜明的特点，丰富了一般公式的内涵。令  $m = a, n = b$ ，就得到了完全平方公式。

# 2

## 构筑关联系统

●先把完全平方公式  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (1) 当做**逻辑起点**，把  $-b$  看作  $b$ ，利用公式(1)，得到  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  (2)，联立(1),(2)，两式左右**两端分别相减**，得到  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ ，令  $x = a+b, y = a-b$ ，则  $a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x-y}{2}$ ，这样得到  $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ ，即

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)(3),$$

**对偶方法，和差术等代换技巧自然地出现了。**



●也可**直接从(1)出发变形**： $(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2 = b(2a+b)$ ，令  $x = a+b, y = a$ ，则  $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ ，即证  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。

# 2

## 构筑关联系统

● **也可**把： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (3), 选作**逻辑起点**，推得(2)及(1)。

由(3)可以变形得到  $a^2 = b^2 + (a+b)(a-b)$ ，令  $x+y = a, b = y$ ，则得到

$$(x+y)^2 = y^2 + (x+2y)x = x^2 + 2xy + y^2$$

这就证明了完全平方和公式。



### 总结

- ◆ 这就说明，这三个公式在逻辑上等价的,可以**构成一个循环系统**，把任意一个当作学习起点均是可行的。
- ◆ 事实上，**这些公式的直观载体都是面积。**

### 3 方法的推广 很重要

- ◆ 孤立的方法没有多大的数学价值或教育价值。对于完全立方公式及立方和等公式，上述方法依然适用。

记：

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (4)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (5),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (6),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad (7).$$

- ◆ 与上面类似，我们可以由

$$(4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7).$$

由(4)推出(5)，由(6)推出(7)，均只要变个符号即可。

### 3 方法的推广 很重要

现由(4)推  
(6)

- 由(4)可以变形得到  $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3$ ,  
即  $a^3 + b^3 = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$ .
- 反过来, 也可以由 (7)  $\iff$  (6)  $\iff$  (5)  $\iff$  (4).

现由(7)推  
(4)

- 由(7)变形得到  $a^3 = b^3 + (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ,  
令  $a = x + y, b = y$ , 则有  $(x+y)^3 = y^3 + x[(x+y)^2 + (x+y)y + y^2]$ ,  
展开化简即得  $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ , 这就证明了(4).
- 这组公式在逻辑上也等价, 它们的几何直观模型是**如何算体积**.

### 3 方法的推广 很重要

系统1和系统2完全类似,而在功用上则逐步深入.通过  
以上两个小系统的构建,说明了推广方法的合理性。

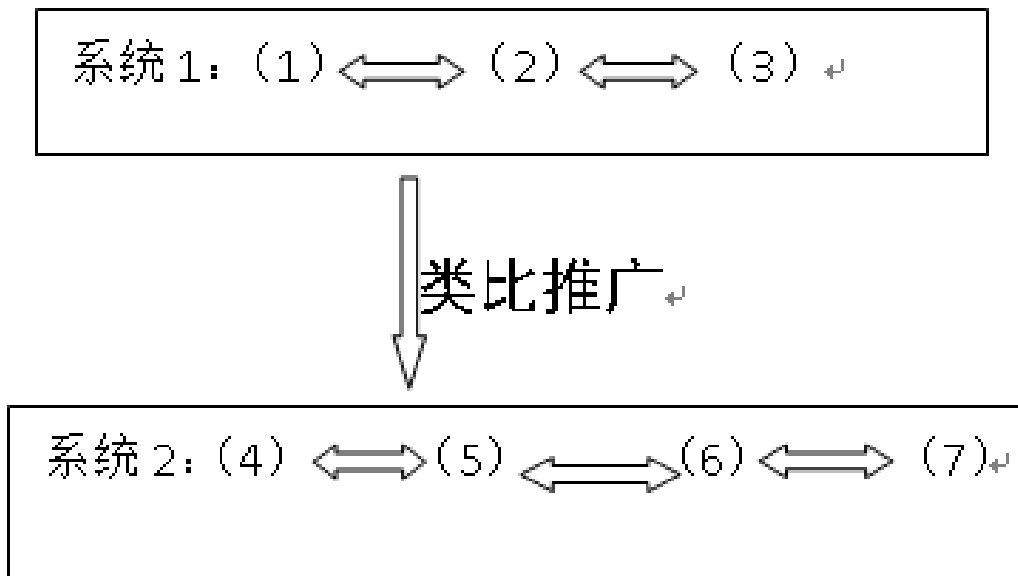


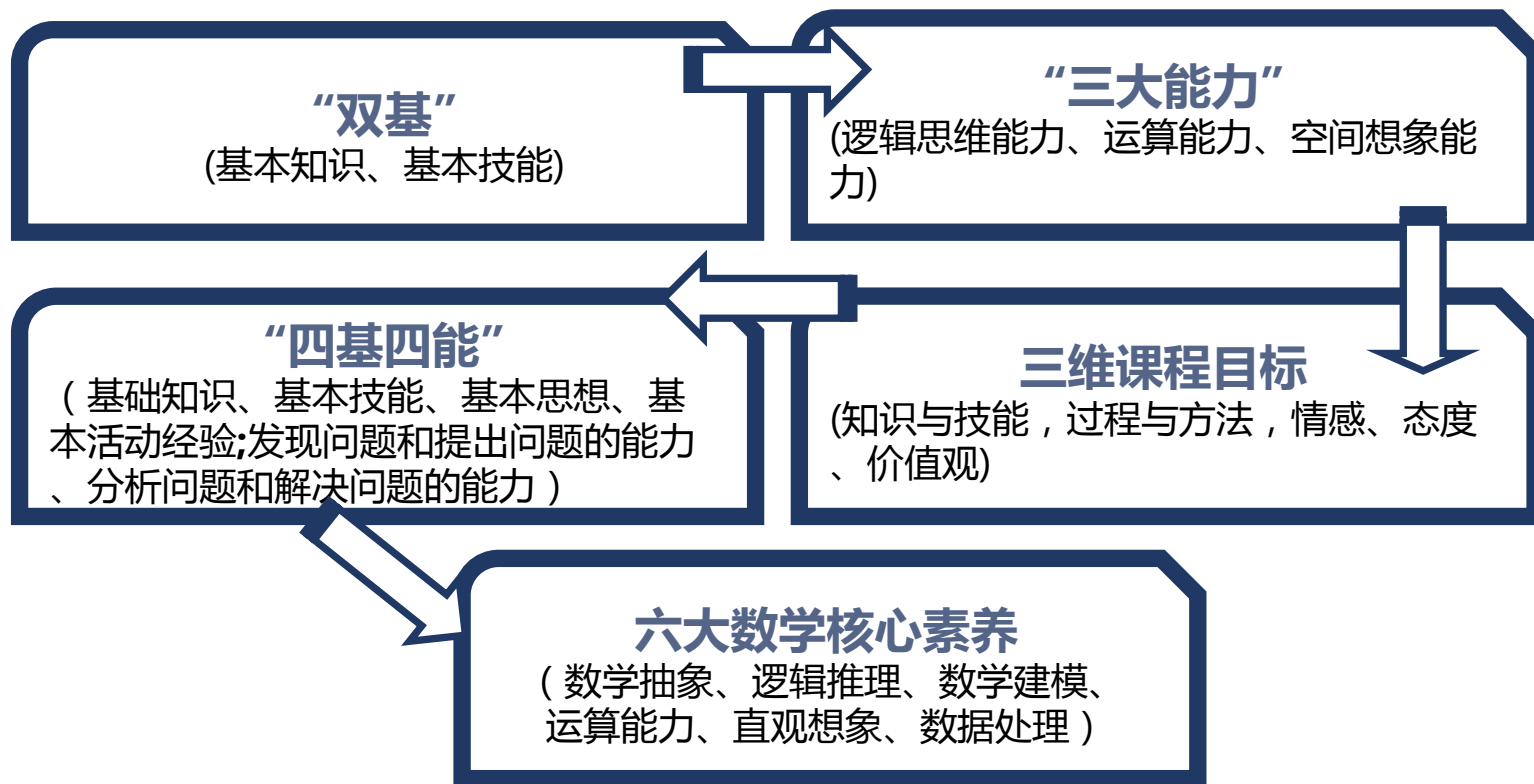
图2 微课程的数学解读

- 从数学上看,公式(1)即完全平方和公式是基础,其余是派生的;系统(1)是基础,系统(2)是派生的.抓住这两点,这个微专题也就掌握了。



## 2.2.2 挖掘教育价值

### 数学教育目标的表述变化



#### 总结

- ◆ 无论提法如何变化, 使学生学会运算, **以运算为载体**培养学生观察、分析、提出问题, 归纳总结的总目标是教学的应用之义。故而章建跃老师指出 **“把数学教好是落实核心素养的关键”**。

## 2.2.2 挖掘教育价值

根据微课程的数学解读，**培养**学生的**核心素养**可以**分层次**地进行。

**层次1：熟练地运用基本公式，获得基本技能——完全平方和公式**

**层次2：开展探究性学习，培养探索能力——得到完全平方差公式和平方差公式**

**层次3：学会类比学会猜想，获取基本获得经验——得到有关立方的公式**

**层次4：知识技能化——自主构建知识体系层次**

## 2.2.2 挖掘教育价值

### 层次1：熟练地运用基本公式，获得基本技能 ——完全平方和公式

- 可以根据面积公式，从形式上得到系统1中的完全平方公式，使学生通过“算两次面积”而得到公式；然后，再通过代数展开而得到该公式；再通过分块算面积或分组计算，**从右到左**地熟练公式。
- 教学目标是不仅要知道公式的几何背景，也要能**化实为虚**地把公式理解为一般情形，**能正用、反用公式**。这相当于基本技能的素养。在这个阶段，不能图快，因为后面的公式均是这个公式的“变式”，**故而于此处要“浓墨重彩”**，不要怕花课时。

## 2.2.2 挖掘教育价值

层次2：开展探究性学习，培养探索能力  
——得到完全平方差公式和平方差公式

- ◆ 虽然可以用展开的方法得到完全平方差公式，再通过大量训练也可以使学生掌握完全平方差公式，但这样做的**教育价值就大大折扣**了。把完全平方差公式的逻辑起点选作完全平方和公式，**迫使学生学会代数之“代”**，而这种精致的思想并非教师强塞的，而是在教师引导下得到的，将给学生留下深刻的印象。

## 2.2.2 挖掘教育价值

层次2：开展探究性学习，培养探索能力  
——得到完全平方差公式和平方差公式

- ◆ 平方差公式的逻辑起点可以选作两个正方形的面积之差,这是小学阶段学生已经掌握了的内容。**如果把平方差公式的逻辑起点选作完全平方公式，就营造了一种数学情境，迫使学生学会对偶方法、和差术、代换法等代数变形技巧。**对复杂的式子作高明的变形将**提高学生对数学的适应性**，而且这些变形技巧并不是孤立的技巧**还对后续课程有辐射作用。**

## 2.2.2 挖掘教育价值

层次2：开展探究性学习，培养探索能力  
——得到完全平方差公式和平方差公式

- ◆ 这种**模拟科研的探究性学习**，不但丰富了教师的教学课型，还培养了学生的自主探索能力。新课程标准强调探究性、研究性学习，并不是要求每一节都是研究型的，而是要和传统启发式讲授课型有机配合。**在前一个层次已经使用了启发式课型，作为其后续的派生内容的教学，可以放手让学生大胆实践，没有必要包办到底。**

## 2.2.2 挖掘教育价值

层次3：学会类比, 学会猜想, 获取基本活动经验  
——得到有关立方的公式

- ◆ 根据数学上的解读，有关立方的公式构成了系统2和系统1是**完全平行的**。因此在此处就要求**学生能自行提出问题**，从哪些方面着手，可以得到有关立方的公式。

**为了降低坡度，可以设置如下的问题：**

如果把完全平方和公式看作是面积公式，试分析：

- (1) 一共计算了几块面积？
- (2) 表现在代数表达式上一共有几项？
- (3) 面积由长和宽来计算，项的可能形式有哪些？项的次数是多少？项的系数是多少？

## 2.2.2 挖掘教育价值

层次3：学会类比, 学会猜想, 获取基本活动经验  
——得到有关立方的公式

- 通过设置具体的几何背景，**多项式中的基本概念**——项的组成、次数、系数等概念的重要性得到了强调。然后，让学生把面积推广到体积，看能提出哪些问题。
- 这里**渗透了组合数学**的思想和方法。组合的思想和方法在小学数学教材出现了很多次，在初中数学中几乎没有涉及，这里是一个有益的渗透。



## 2.2.2 挖掘教育价值

层次3：学会类比, 学会猜想, 获取基本活动经验  
——得到有关立方的公式

- ◆ “把教学过程当作科研过程”<sup>[5]</sup>，数学的发展本来就是发现问题，分析问题，解决问题的过程，教师的任务则是凭借研究经验，通过合情推理**模拟**这个过程。数学教学过程不仅要使学生掌握基本知识、基本技能，还要使学生掌握数学思想方法和做数学研究的一些基本经验。这是课堂教学的教育价值所在。

## 2.2.2 挖掘教育价值

### 层次4：知识技能化 ——自主构建知识体系

- 教育数学三原理指出：**在学生头脑里找概念，从概念里产生方法，方法要形成模式。**<sup>[6]</sup>这是非常科学的，文[7]已经阐述其科学性。
- 在教学上上，学生学习过的知识和技能，不一定就完全掌握，学习需要一定的**变式重复**，让知识技能化。故而，让学生类比系统1，建构系统2，就是一个变式重复的过程。这种变式重复，虽然复杂度有所增加，然而其基本思想方法没有变化。重温这个学习探索过程，学生也能明白在数学学习中，思想和方法是最基本的，**思想和方法**是知识的内核。这就从情意、态度和价值观等方面启发了学生的悟性，这样，数学的教育价值得到了落实。

## 2.3 微课程重构的个案实践

### 第一个系统的训练体系

#### 画图计算，强调公式的几何背景。

如要求学生画图，用面积法计算  $(a+b)(c+d) = \underline{\hspace{2cm}}$  等等。这一步的教学目标是使学生明白知识的源头。

#### 展开计算，要求学生所多项式的乘法法则计算。

如计算  $(a+b)(c+d) = \underline{\hspace{2cm}}$  等等。这一步的教学目标是使学生能摆脱具体几何景束缚，领会代数的程序化，扩大公式的应用范围。

#### 合并计算，要求学生能反用公式。

如要求学生把  $ac + ad + bc + bd$  变形成乘积形式。这一步的教学目标使学生学会逆向思考，也为后面的因式分解打下基础。

#### 证明，要求学生能灵活运用公式。

这一步的教学目标是使学生领悟代数推理的精神，把推理融在运算中。例

## 2.3 微课程重构的个案实践

### 第一个系统的训练体系

例如，已知 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，求证： $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ 就是一个例子。或，已知： $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ，求证： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。这里之所以使用 $x, y$ 等符号，考虑学生对代数的认识还需要一个过程，降低一下难度。

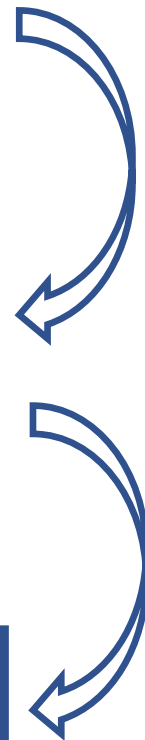
## 2.3 微课程重构的个案实践

第二个系统的训练体系

第一层次:温故知新, 不算而算。

第二层次:学会类比, 不算而算。

第三层次:自主建构, 体会和谐  
美。



## 2.3 微课程重构的个案实践

### 第二个系统的训练体系

#### 第一层次:温故知新, 不算而算。

●完全平方和公式  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  可看作是面积公式。试分析:有( )块面积,故有( )项;每一块都表示面积,有长和宽两个元素,故项的可能形式是( , , ),次数都是( );各项系数是怎样来的?

#### 第二层次:学会类比, 不算而算。

●如果把  $(a+b)^3$  看作是体积,试分析,有( )块体积,故有( , , , )项;每一块都表示体积,有长、宽和高三个元素,故项的可能形式是( , , , , , , , ),次数都是( );各项系数是怎样来的?

#### 第三层次:自主建构, 体会和谐美。

- 类比有关平方的公式,你还能得出几个有关立方的公式?能否沟通它们之间的内在关联?
- 经过5个课时的学习,初一的学生能很好地掌握这些知识和思想,初二的学生也能很好地掌握这些知识和思想,两者没有表现出明显的差异。

## 2.4 微课程重构的课堂教学推广

### 个案研究的 实践表明:

1

◆ 学生**完全可以**掌握这些知识、思想和方法，对数学的认识有了明显的进步。如果要用之于课堂教学，可以选好时机。

2

◆ 或是在新授课之中穿插进行，多种课型有机搭配进行；  
◆ 也可以在单元小结的时候进行，作为复习课进行教学。

3

◆ 基于这种微课程重构进行教学，不必大动教材，只需要教师**对教材**的使用有**系统思考**，**对学生**能力的培养有**通盘的考虑**。

花絮：无意而为之，巧遇2019全国高考数学试题

23. [选修4-5：不等式选讲] (10分)

已知  $a, b, c$  为正数，且满足  $abc = 1$ . 证明：

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2;$$

$$(2) (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24.$$



# PART THREE

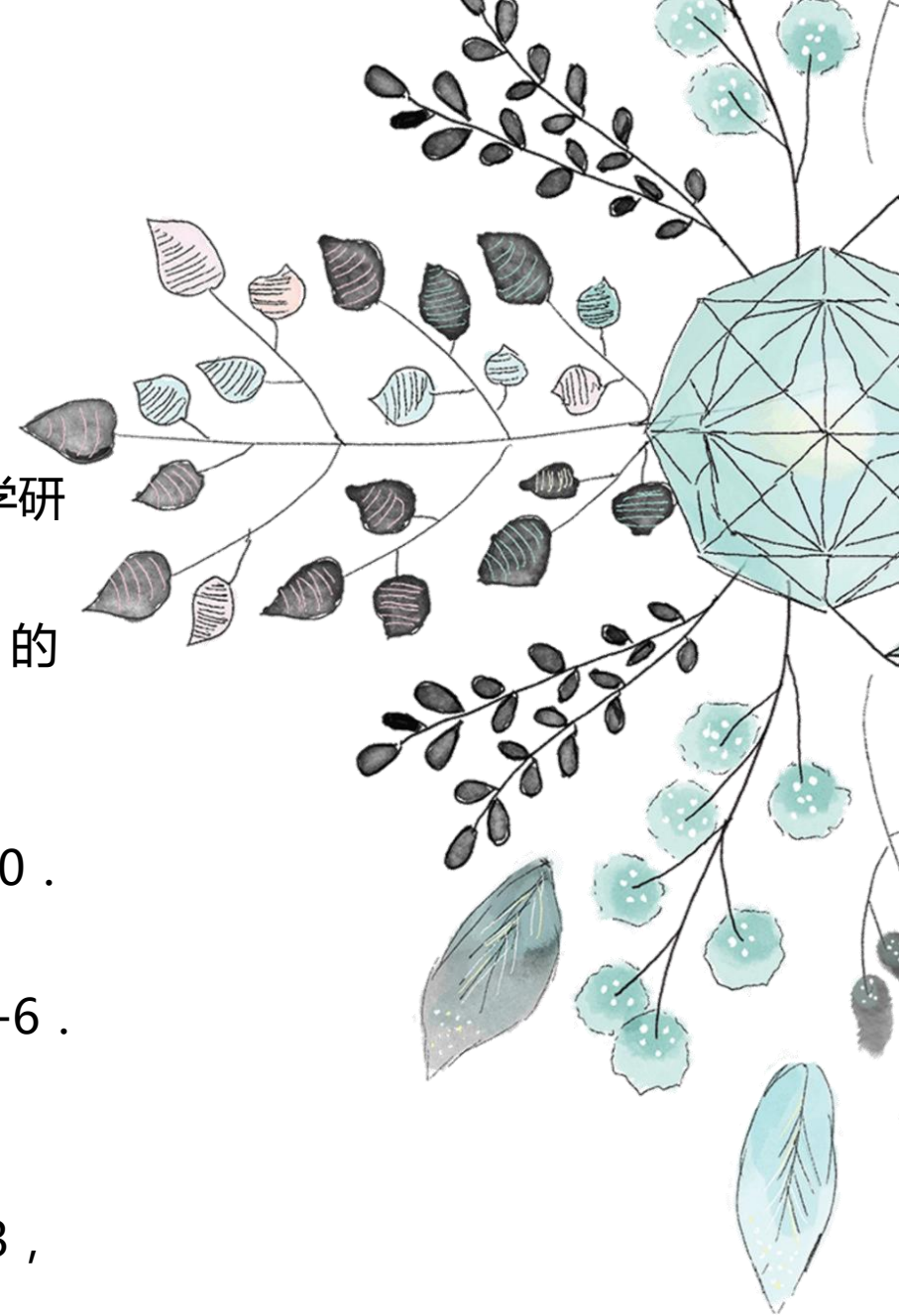
## 3 结语



- ◆ **教育数学的研究**已经引起了许多学者的注意，如，美籍华人童增祥教授既熟悉中国的教育情况，又熟悉美国的教育情况，非常推崇教育数学的思想，在美国办研究班推广教育数学思想。
- ◆ **教育数学之所以受到推崇**，是因为教育数学从一开始就心中有学生，努力挖掘数学的内涵，使数学离学生更近一些，更近一些。
- ◆ **教育数学的实践**正确解读了考试大纲与教学大纲之间，一直以提高学生的核心素养为己任，而这些正是考试大纲所要求<sup>[8]</sup>，故教育数学的实践从不畏惧考试。从已有的实践来看，这点已经得到了检证。教育数学在课程重构中落实了学生的学科核心素养。

# 参考文献

- [1]程靖,马文杰,张奠宙.“教育数学”的内涵及其分析框架研究[J].教育科学研究,2016,(6):44-49.
- [2]洪燕君,周九诗,王尚志,鲍建生.《普通高中数学课程标准(修订稿)》的意见征询——访谈张奠宙先生[J].数学教育学报,2015,(3):35-39.
- [3]徐章韬.面向教学的数学知识[M].北京:科学出版社,2015,46.
- [4]张景中.重建三角,全局皆活[J].数学教学,2006,(10):封二-10.
- [5]曹广福.把教学过程当作教研过程[J].中国大学教学,2015,(12):11-14.
- [6]张景中.什么是“教育数学”[J].高等数学研究,2004,(6):2-6.
- [7]朱华伟,徐章韬.教育数学:缘起、旨趣、现状和意蕴[J].数学教育学报,2015,(4):30-32.
- [8]任子朝,周远方,陈昂,田祥高.高考数学科考核目标研究[J].数学通报,2013,(7):1-7.



谢 谢



THANKS

