

中国数学教育应关注的经验与问题

高中数学课标修订组

首都师范大学数学科学学院

王尚志

目录

- 让数学建模进入数学教育课程？
- 课程标准修订——单元教学
- 重新重视运算能力培养？

中小学数学课程变化

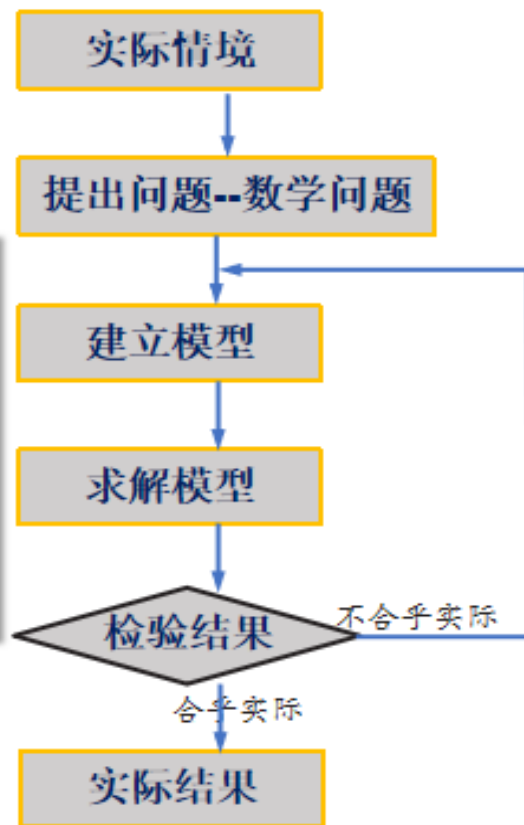
- 几次重大结构性的变化：关于“概率统计”的故事
- **函数**作为中学数学课程主线
- **概率与统计**进入中小学数学课程
- **向量**——高中几何课程主要内容和基本思想方法
- **数学建模**进入大、中、小学数学课程？
- ？ ？ ？

“数学建模”进入了高中数学课程

数学建模进入了基础教育

数学建模活动是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的过程。主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题。数学建模活动是基于数学思维运用模型解决实际问题的一类综合实践活动，是高中阶段数学课程的重要内容。

——普通高中数学课程标准



数学建模进入数学课程？

- 综合与实践活动——数学建模活动
- 举例：跷跷板设计——提高校区体育设施利用率
- 纸箱设计——过渡包装
- 反映家乡变化数据分析——如何论述家乡变化
- 以“提升解决实际问题能力”为目标，不是以“学习一些综合知识”为目标
- 真实情境——以有教育价值、数学价值的问题引领——在解决问题过学生有自主思考和创新空间
- 在中小学阶段，“数量关系、空间形式”是探索实际事物规律主要手段。

“高、初、小阶段数学建模教学实践探索”——全国22试验区

北京师范大学数学科学学院——数学建模教育研究中心

小学

教师引导
建模实践

初中

师生合作
建模实践

高中

自主选题
建模实践

高阶
活动

参与建模
建模活动

可否进入义务？教育教育部项目：第一期 小、初、高数学建模实践研究

- 目标——研制出一批比较好的案例（高、初、小）：
 - 1、完成一批数学建模实践项目的案例，覆盖每一个学段、每一个年级
 - 2、完成一批把项目转化为教学设计的案例，其中部分进行了教学实践
 - 3、一些教师指导学生开展数学建模实践活动
 - 4、每一个学段设立了实验学校，探索如何开发数学建模校本课程
-

数学建模教学实践总结

- 探索、并初步形成了培训教练员、骨干教师的培训方案
- 1、如何指导教师设计、开展数学建模实践项目实施，形成基本范式。
- 2、如何指导教师把项目转化为教学设计，并教学实践，形成了基本范式。
- 3、如何指导学生开展数学建模实践活动，形成了基本范式。
-

教育部项目：第一期 小、初、高数学建模实践研究

- 研制出一批案例（高、初、小）优秀案例：

- | 学段 | 项目总数 | 教学设计完成数 | 教学实施完成情况 | | 全部完成总数 |
|----|------|---------|----------|--------|--------|
| | | | 计划总课时数 | 已完成课时数 | |
| 小学 | 196 | 196 | 794 | 660 | 138 |
| 初中 | 98 | 91 | 320 | 50 | 14 |
| 高中 | 211 | 96 | 100 | 65 | 53 |
| 合计 | 505 | 383 | 1214 | 775 | 205 |

教育部项目：第一期 小、初、高数学建模实践研究

- 经过“中小学数学建模实践研究”项目研究与实践，可以得到以下主要结论：
 - 1、在高中、初中、小学每一个年级，学生可以在教师的指导下都开展数学建模实践活动，这些活动可以转换为教学设计，并实施教学。
 - 2、在专家指导下，教师有能力实践数学建模项目实践，有能力把项目转化为教学设计，并进行教学实践。
 - 3、在高中、初中、小学开展数学建模教学活动（包括数学建模项目实践、教学设计、教学实施）存在很大差异，例如，构建解决问题思路过程中，年龄小孩子常常不能一下子提出解决问题思路，而是，一边解决问题，一边改进、完善思路，即使老师提出思路，他们也不能很好理解，有效的方法还是边实践，边改进。结题环节中的反思变得很重要，如果能再做一次，也许更有助于能力提高。这些经验值得认真总结。

教育部项目：第一期 小、初、高数学建模实践研究

- 经过“中小学数学建模实践研究”项目研究与实践，可以得到以下主要结论：
- 4、学生很喜欢这样活动。
- 5、在高中、初中、小学学习环境中，存在丰富的数学建模素材和可以开展数学建模活动的问题，在开展数学建模教学中，应鼓励教师、学生开发新的、真实的问题。
- 这是评价数学建模教学重要标准。这样评价促进教师、学生创新能力提升。
- 6、发现一些推动数学建模发展进本问题：小学、初中、高中数学建模课程的构建，小、初、高一体化的探索。数学建模课程突破会带动各学科综合实践活动课程的发展。

教育部项目：第二期 小、初、高数学建模一体化研究

- 经过“中小学数学建模实践研究”项目研究与实践，可以得到以下主要结论：
- 发现一些推动数学建模发展进本问题：
 - 小、初、高数学建模特点与规律
 - 小学、初中、高中数学建模课程的构建
 - 小、初、高一一体化的探索。
 - 数学建模课程突破如何带动各学科综合实践活动课程的发展。
 - 数学建模课程与信息技术、人工智能结合。
- ——如果学生在每一年学习中，都有机会

教育部项目：第二期 小、初、高数学建模一体化研究

- ——如果学生在每一年学习中，都有机会一个实际问题，.....？
- 问题在哪里？
- 校园——校园中不合理现象：教师标记，桌椅设计，.....
- 卖书，评奖，.....
- 运动会设计，校园服务设计，.....
- 学习规律--红楼梦深度阅读，.....
- 超市，火车站，社会生活，经济生活，科学技术



中法应用数学研究所

中国 上海 200433 复旦大学 电话: 21-65642469 传真: 21-65648274 电子邮箱: isfma@fudan.edu.cn

数学建模的教育与实践活动,对大学本科生而言,在全国范围内已有多年的历史,并积累了相当丰富的经验,但在中小学中仅在近几年才开始逐步形成风气。然而,这是一个很有意义和发展前途的新生事物,不仅值得大力提倡,更需要认真总结经验教训,根据学生现有的知识素养及阅历,对不同的年龄阶段,明确相应的定位并精心加以组织,使能对提高广大中、小学生的创新意识、创新精神及创新能力发挥积极的推动作用。

视北京师范大学负责的“中小学数学建模实践研究”项目在这方面的取得丰硕的成果。

李士记

2023年5月4日

- “我认为这些活动（数学建模活动）摸索出一条新路子，这对教育改革会起很大作用，而且会改变同学们对数学的看法。现在其作用不见得完全显示出来，但是时间长了会起更大的作用。”

- 丁石荪（全国人大副委员长、北京大学校长）（1998年）

可否进入义务数学课程？

- 第二，从1997年——2001年，国家教育规划重点课题，“中学数学建模课程、教学的理论实践”
- 初步形成数学建模课程、教学、实施的基本思考。为“数学建模”进入2003版高中数学课程标准做了一定准备。

“数学建模教学活动”基本流程

1

数学建模
活动实践

2

数学建模
教学设计

3

数学建模
教学实施

4

数学建模
教学活动总结

“数学建模实践活动”基本流程——微科研

1

选题
开阔数学视野

2

开题
形成思维习惯

3

做题
提升数学水平

4

结题
增强实践意识

“数学建模教学活动设计” 建议

主旨：把开展的“数学建模实践活动”转化为数学建模教学活动。

数学建模教学设计

||

数学建模教学实施

||

数学建模教学活动总结

“数学建模教学活动设计” 建议

数学建模教学设计——四个关键

数学建模教学目标

||

数学建模教学规划

||

数学建模教学中学习活动设计

||

评价设计

“数学建模教学活动设计” 建议

数学建模教学目标

例如，

引导学生经历运用数学建模解决问题的全过程

——选题、开题、做题、结题（可以是一部分）

感悟数学的应用价值（具体化）

掌握某种数学建模解决问题思路、方法

.....

“数学建模教学活动设计” 建议

数学建模教学规划——大单元教学设计

可以围绕着——选题、开题、做题、结题基本过程展开，确定教学的结构

- 1、课时确定 选题、开题、做题、结题——各几个课时
- 2、课时教学设计
- 3、每一个课时分几个阶段
- 4、课前、课上、课后

“数学建模教学活动设计” 建议

数学建模教学规划——大单元教学设计

停车场设计

一、选题与开题——2课时

思路： 1、绘制停车场平面图， 2、收集停车场的设计思路， 3、确定停车场设计的要素，
4、设计方案， 5、比较、改进， 6、成果展示、拓展。

二、做题——2课时

三、结题——2课时

“数学建模教学活动设计” 建议

数学建模教学中学习活动设计（举例）

评价设计（举例）

全面进入数学课程？

- 第三，复旦大学谭永基教授等在上海最早开展了中学数学建模活动。从1993年，北京数学会——北京师范大学，开展了“中学生数学应用（原）”——“数学建模能力展示活动”。
- 第一阶段，“开卷预赛”（原）——“网上闭卷预赛”
- 第二阶段，“选题论文比赛”
- 第三阶段，“闭卷试题”和“论文答辩”

学业质量标准：工作流程

第一步：反思学科本质，概述学科本质观

第二步：反思学科的课程性质，凝练或理解学科核心素养

第三步：理解核心素养内涵，划分素养表现水平

第四步：梳理学科内容，形成围绕结构化的学科内容体系

第五步：构建学业质量标准：教、学、评（考试命题）

第六步：综合整个课标内容，进行自我检核

概述学科本质观

数学的主要作用：

数学是从数量关系和空间形式的角度，探索、表达和理解世界中事物的本质、关系和规律。

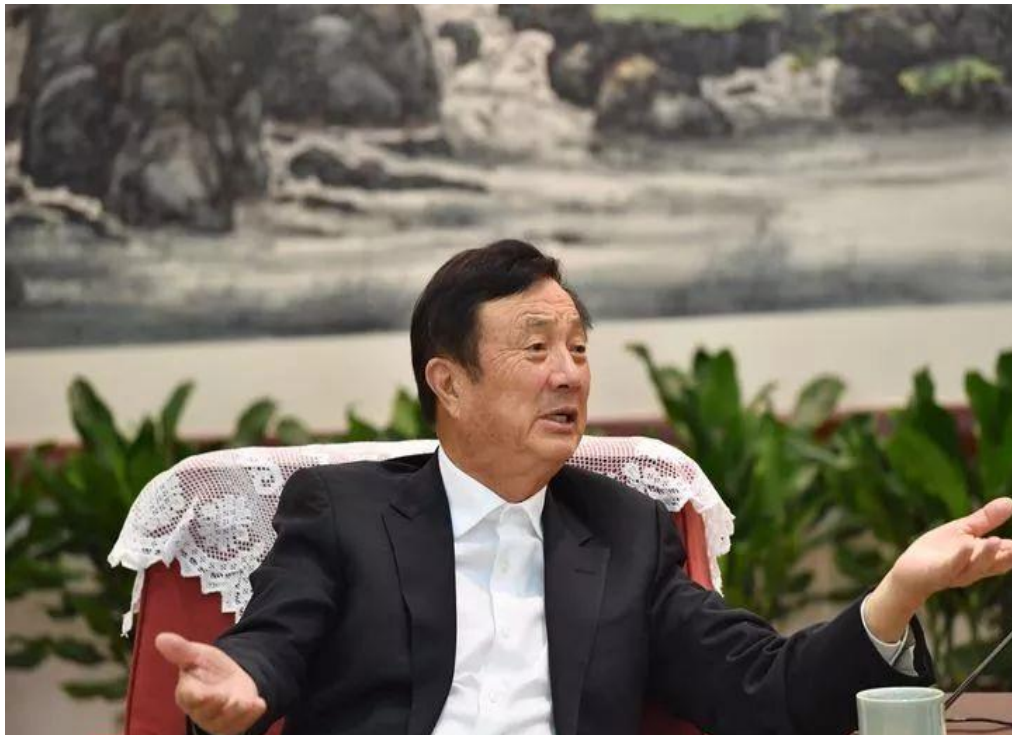
“数学已经从幕后走到前台，直接为社会创造价值。”“几乎所有的重大发现都与数学的发展与进步相关。”运用数学的概念、方法、思想，结合各学科知识、结合科技和社会实际，**解决**“自然或社会现象，个人或社会状况”中的**问题**。随着进入**数字化时代**，随着**计算机、人工智能、大数据**等迅猛发展，“数学已渗透到每一个领域。”

数学思维（素养）是形成科学思维方式的重要组成部分。

数学是研究数量关系和空间形式的一门科学。数学源于对现实世界的抽象，基于抽象结构，通过符号运算、形式推理、模型构建等，探索、理解和表达世界中事物的本质、关系和规律。数学与人类生活和社会发展紧密关联。数学不仅是运算和推理的工具，还是表达和交流的语言。数学承载着思想和文化，是人类文明的重要组成部分，数学实力往往影响着国家实力，几乎所有的重大发现都与数学的发展与进步相关，数学已成为航空航天、国防安全、生物医药、信息、能源、海洋、人工智能、先进制造等领域不可或缺的重要支撑。数学是自然科学的重要基础，并且在社会科学中发挥越来越大的作用，数学的应用已渗透到现代社会及人们日常生活的各个方面。随着现代科学技术特别是计算机科学数字信息技术、人工智能技术的迅猛发展，人们获取数据和处理数据的能力都得到很大的提升，伴随着大数据数字化时代的到来，这使数学的研究领域与应用领域得到极大拓展。数学直接为社会创造价值，推动社会生产力的发展。

数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用。数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养。

为什么重视数学建模？背景：数学在产品研发中起到的重要作用



有位国企的老板问任正非，华为为什么20多年就能成长为国际化企业？是不是靠的低价战略？任正非说你错了，我们是高价。对方又问，那你凭什么打进了欧洲？回答是靠技术领先和产品领先，**重要因素之一就是数学研究在产品研发中起到的重要作用。**

华为——2008. 7. 24

土耳其数学家 Erdal Arıkan 发表了 Polar code 的论文，25日邀请他访问华为，商谈合作，奠定5G的理论基础。

我国成立了：13个数学应用研究中心

为什么？世界强国与数学强国

光明日报

首页>光明日报

张恭庆：建设数学强国 服务伟大梦想

2017-12-23 03:51 来源：光明网-《光明日报》

【众说十九大·科技篇】

光明日报记者 晋浩天 采访整理

中国科学院院士
第三世界科学院院士
第七届中国数学会理事长



为什么？数学已经从幕后走到前台，直接为社会创造价值

当今数学不再只是通过其他基础学科间接地应用于技术领域，而是广泛地、直接地应用于各种技术之中。

数学已经从幕后走到台前，直接为社会创造价值。

数学应用已经遍布几乎每一个角落。



数学的全面认识——正确的数学观

《为什么要学数学？因为这是一场战略性的投资》

- 数学是一类常青的知识
- 数学是一种科学的语言
- 数学是一个有力的工具
- 数学是一个共同的基础
- 数学是一门重要的科学
- 数学是一门关键的技术
- 数学是一种先进的文化

数学建模是开启数学大门的一把金钥匙，对发展数学学科和推动数学应用极其重要，它是发现和培养创新型人才的重要途径，也是推动数学教育改革、落实实施高中课程标准的关键环节。

——李大潜中国科学院院士



- 我国传统数学在从问题出发以解决问题为主旨的发展过程中建立了以构造性与机械化为其特色的算法体系这与西方数学以欧几里得《几何原本》为代表的所谓公理化演绎体系正好遥遥相对。《九章》与《刘注》是这一机械化体系的代表作与公理化体系的代表作欧几里得《几何原本》可谓东西辉映在数学发展的历史长河中数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复互为消长交替成为数学发展中的主流。肇始于我国的这种机械化体系，在经过明代以来近几百年的相对消沉后，由于计算机的出现，已越来越为数学家所认识与重视，势将重新登上历史舞台。《九章》与《刘注》所贯串的机械化思想，不仅曾经深刻影响了数学的历史进程，而且对数学的现状也正在发扬它日益显著的影响。它在进入二十一世纪后在数学中的地位，几乎可以预卜。
——吴文俊

提升数学核心素养发展的基本路径——单元教学

- 高中数学课程标准修订
- ——重点学业质量标准
- 核心素养贯穿在学业质量始终。通过四个方面提升：
- 情境与问题解决、知识与体系建构、
- 思维与交流表达、态度与价值判断。

提升数学核心素养发展的基本路径——单元教学

- 单元教学——整体把握数学：知识点、课堂教学、单元、整个课程
- ——从“学会”——“会学”

单元教学（主题）案例分析

计数内容：

两个基本原理；

排列及其性质；

组合及其性质；

二项定理

有限样本空间与古典概型的概率

二项式分布

统整策略：单元教学（主题）案例分析

课例展示：两个基本原理；

应用背景；

典型问题分析；

原理抽象；

原理分析；

原理应用——交流；

总结

单元教学（主题）案例分析

点评：两个基本原理哪个更重要、更基本？——本质？

排列中？

组合中？

二项式定理？

概率？

单元思考？

“计数”单元主题：提升分类能力，发展运算素养

单元教学（主题）案例分析

- 直线与圆
- 课程（教学）规划
- 教学内容与单元主题



统整策略：单元教学（主题）案例分析

- “深度学习--单元教学”要素：
- “单元”内容选择
- “单元”的整体分析（课标、教材、学情）
- 凝练“单元”的学习目标、主题
- “单元”教学规划（参考三角函数等实例）——构建单元课程体系
- 整体设计“单元”学习活动
- 构建“单元”评价体系

案例分析：“三角函数”单元教学设计思路

单元教学的一些突破

目标明确——从大到小（构建模型——解决问题）

结构清晰——单元--阶段--课时

——起始课--核心课--总结提升课

构建激发学生主动学习的学习活动

不足：评价

案例展示：南开中学

基于“三角函数单元教学规划”，单元教学说课——

整体分析--课标（数学）、学情、创造性使用教材

三角函数单元教学规划——阶段——课时

主题——目标确定

学习活动特点

评价体系构建与特色

案例分析：“三角函数”单元教学设计思路

本单元教学的一些突破

目标明确——从大到小（构建模型——解决问题）

结构清晰——单元--阶段--课时

——起始课--核心课--总结提升课

构建激发学生主动学习的学习活动

不足：评价

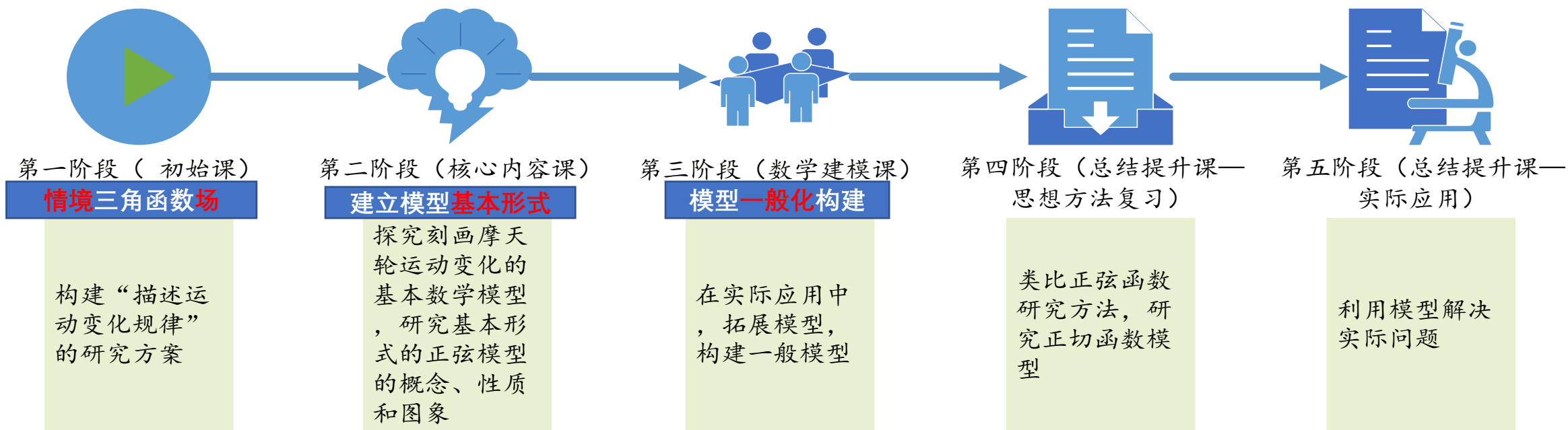
确定主题：构建三角函数模型，提升数学建模素养

目标

1. 通过以下过程：基于丰富的实际运动变化的背景——构建、研究正选函数模型——应用模型解决问题，感悟数学建模的过程，再通过自主构建和应用正切函数模型的过程，不断发展数学建模能力。
2. 通过经历模型建立过程，基于实际问题到探索、构建基本形式（基本函数模型），进而构建一般模型的逐步抽象的过程，加深对模型认识，提升数学抽象能力。
3. 在构建三角函数模型的过程中，充分利用单位圆和函数图形的几何直观，让抽象函数性质变得直观易懂，结合图形认识几何变换，提升几何直观水平。
4. 了解三角函数模型广泛的实际背景，以及在应用三角函数模型解决实际问题的过程中，发展解决问题能力，提升数学的应用意识。
5. 通过构建和应用正弦函数和正切函数模型的经历，积累研究函数的经验，提升学习和应用能力。

2、三角函数单元教学规划：

五个阶段



核心想法：通过研究实际问题贯穿整个三角函数的研究

案例展示：南开中学

体现“深度学习-单元教学”特点的课堂教学（六节课）

六节特色课

通过六节课体现“深度学习-单元教学”的思想，体现整体把握数学课程，体现学生主动参与，学会学习数学，体现评价整体构建。

(1) 起始课

突出：**正弦三角函数丰富实际背景**——周期变化广泛的应用。研究实际问题整体思路。

研究思路：

丰富背景-摩天轮变化（参数）-用函数刻画变化-（单位圆-坐标？）

案例展示：南开中学

体现“深度学习-单元教学”特点的课堂教学（六节课）

六节特色课

(2) 核心课：正、余弦函数概念

突出：几何直观-单位圆作用

(3) 核心课：正、余弦函数性质

突出：几何直观-单位圆作用

案例展示：南开中学

体现“深度学习-单元教学”特点的课堂教学（六节课）

六节特色课

(4) 核心课：正弦函数一般模型

(5) 总结提升课：正切函数

突出：仿照正弦函数研究过程——类比——构建正切函数

(6) 总结提升课：正弦函数应用（选择：实际应用或数学应用）

重新重视运算能力（运算素养、计算思维）培养？

- 背景：
- 参加AI（人工智能）研讨会——数学教育？
- 修订高中课程标准
- 义务教育教材评审
- 单元教学

机器证明——吴文俊



重新重视“运算能力”（运算素养、计算思维）培养？

三会：

用数学的眼光观察世界，

用数学的思维分析世界，

用数学的语言表达世界。

表现：

抽象能力（包括数感、量感、符号意识）、几何直观、空间观念、创新意识、

运算能力、推理意识或推理能力、数据意识或数据观念、模型意识或模型观念、应用意识

这些表现之间有密切联系，构成完整的整体？

可否分类、按重要程度排个序？

重新重视“运算能力”（运算素养、计算思维）培养？

可否分类、按重要程度排个序？

运算能力——数感、量感、符号意识，，抽象能力，模型意识，几何直观等；

推理能力——几何直观，空间观念，数感、量感、符号意识，模型意识等；

应用能力——运算能力，推理能力，数据分析，抽象能力

抽象能力？

与时俱进

小学运算能力——初中运算能力——高中运算能力

算得准、算得快？

||

构建运算体系：

运算对象

运算形式、

运算规则

运算应用

与时俱进

小学运算能力——初中运算能力——高中运算能力

算得准、算得快？

||

运算应用

识别运算问题

构建运算解决问题思路

把思路转换为程序（步骤）

理解运算结果

总结拓展（思想方法--通性通法）

数学核心素养实例分析

- 数学核心素养实例分析（数学抽象）
- 为什么重视字母代替数？—— 如何理解运算对象——可以替代数的字母？——逐步提升模型认识
- 通过运算，从一个一个解决问题，到一类一类解决。
- 初中：因式分解问题，解方程问题，求解不等式问题，探索函数变化,……
||
高中：研究函数、方程、不等式，等
同一个数学对象掌握的水平不同

通过运算，从一个一个解决问题，到一类一类解决。

- 变量模型——函数模型

-

- 建立函数

- 常、变量—— || ——阅读能力

- 依赖关系—— || ——函数思想

-

- 函数分类

-

- ||

正比例函数

- 函数分析（变化）

一元一次函数 —— 幂函数

-

- ||

一元二次函数

-

- ||

反比例函数

- 解决问题

指数函数、对数函数

- (最值、方程、不等式)

等差数列、等比数列

-

.....

-

构建课程体系（1）——单元教学举例

- 单元：一元二次函数——构建单元课程体系
- 第一阶段 背景——恒力作用下物体运动规律
- 第二阶段 基本二次函数 $y = x^2$
- 第三阶段 一般二次函数模型 $y = A(x-h)^2 + b \iff y = ax^2 + bx + c$
- (研究方法：几何直观、代数运算)
- 第四阶段 一般二次函数模型再认识
- (研究方法：函数-导数方法、几何直观、代数运算——类比)

谢 谢!