中学数学课程的两个漏洞

中学数学教材当中有两个逻辑上的漏洞：无限循环小数的定义和无理数的定义没有解释清楚，本文对此进行了填补。

（一）、两漏洞

中学数学知识的起点（或基础）：分数也叫做比例数（rational numbers)及其算术—加、减、乘、除。全体分数的集合记为 $\mathbb{Q}$, 全体正整数的集合记为 $\mathbb{N}_+$, 全体整数的集合记为 $\mathbb{Z}$.

缺失“**分数序列的极限**”的概念，整个中学的数学课程不得不留下两个逻辑漏洞。

第一个漏洞：初中二年级的定义，我们把它写成

定义 1 十进循环数叫做**比例数**（即分数，rational number);十进不循环数叫做**非比例数**(irrational number), 统称为**实数**(real number). 把十进数规范地写成

$$\alpha := p + 0.a_1a_2\cdots \quad p \in \mathbb{Z},\ a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ k \in \mathbb{N}_+. \tag{1}$$

其中 p 叫做 α 的整部，用符号 $[\alpha]$ 表示。当 $p = 0$ 时，(1)右端的 p 可隐去。

问题是：实数 α 用等号右端的符号表示的具体含义是什么？

没讲! 这是**漏洞 1**. 即使 α 是分数，例如 $\frac{1}{7}$, 等式 $\dfrac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 是什么意思？又如 $\sqrt{2} = 1 + 0.4142\cdots$, $\pi = 3 + 0.1415\cdots$ 都是什么意思？

第二个漏洞：在第一个漏洞的基础上，高中一年级的课本上（见 普通高中课程标准试验教科书《数学1》，必修，B版，人民教育出版社, 2007年第3版，2014年第18次印刷，第88页第4 行)说：“我们在这里不能给出无理指数幂严格的定义”.（“无理数”是英文irrational number—或其它同义外国文字的误译，宜译为“非比例数”)。也就是说，幂运算，从而随后引入的指数函数，**根本没有定义**。这是**漏洞 2**.

（二）、填漏洞必须引入极限概念

定义 2 (比例数列的极限) 如果一列比例数(rational numbers) $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ 与一个比例数 r 满足下述条件：不管给定多小的正比例数 ε 都找得到正整数 N 使得只要整数 $n > N$ 就成立 $|r - x_n| < \varepsilon$, 那么就说数列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 收敛到**极限** r，记做 $x_n \to r$ $(n \to \infty)$ 或

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r.$$

数列的常用记法是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 符号“∞”读作“无限（穷)”，或“正无限（穷)”。

基本列（Cauchy 列）的概念：说 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，指的是,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+ \forall m, n > N, |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

明显可见，收敛的数列一定是基本列。

两个数列等价的概念：当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ 时，说它们等价。

（三）、填漏洞的工具—标准列

定义 3 (标准列) 把十进数

$$\alpha = p + 0.a_1a_2\cdots$$

与一个比例数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对应起来，其中分数

$$A_n = p + 0.a_1\cdots a_n \quad (n \in \mathbb{N}_+) \tag{2}$$

是小数点后只有 n 位的“有限小数”，是本原表示的比例数。称数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为**与实数 α 对等的标准列**。

把分数已知的表示形式 $\frac{m}{n}$ $\quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+$ (包括有限小数形式)叫做**本原表示**。

（四）、填漏洞 1

（甲）对“循环数叫做比例数”一语的理解 若(1)中 α 是循环数，它对等的标准列记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$(见(2))。那么存在本原表示的比例数 A 使得

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A. \tag{3}$$

在这个意义上，**说 α 是 A 的十进表示，两者之间划等号**。这样，比例数除了本原表示外，又有了一个十进表示。

(3)式是比例数的十进表示的充分必要形式。也就是说，对于任何一个分数（本原表示），都存在一个标准列以它为极限。此事可用竖式除法证实。

（乙）对“不循环数叫做非比例数”一语的理解 不循环数本来只是一个符号，要使它们具有“数”的功能，必须规定它们之间的算术运算，大小关系等对于比例数已知的各种概念，并保持新建立的一切概念与对于循环数的已知概念完全协调。这通过基本列来完成。

一个技术细节：有限小数一定有两种十进表示，一种以 0 为循环节，一种以 9 为循环节。例如数 0 可以表示为 $0 + 0.\dot{0}$, 也可以表示为 $-1 + 0.\dot{9}$.

规定两个数列（当前是比例数列）的算数运算通过它们的对应项的相应运算来实现。除法要克服分母为零的情形：如果一个数列只有有限项为零，另一个数列被它除就从这有限项之后开始。对于不以 9 为循环节的十进数所对等的标准列来说，只有数字零（比例数）所对等的标准列才可能有无限多项为 0 (实际是每项都是 0).

基本定理 任何一个比例数的基本列都等价于唯一一个不以 9 为循环节的标准列。

定义 4 两个实数的算术运算结果，就是它们对等的标准列经同样运算所得基本列所等价的标准列所对等的实数（十进数）。

实数（用十进表示，如定义 1）的集合记作 $\mathbb{R}$. 其中定义了加减乘除四则运算。数零($0 = 0 + 0.\dot{0}$)以及一切比例数，都有两个表示：除了十进表示，还保持有本原表示。接着就可规

定正、负，大、小，绝对值。并且把关于比例数列的极限的概念直接推广到实数列的情形,一切相关命题依然成立。

定理 1 每个十进数（即实数）都是它所对等的标准列的极限。

证 设实数（十进数） α 如(1),它对等的标准列如(2). A_n 是本原表示的比例数，它的十进表示为

$$A_n = p + 0.a_1 \cdots a_n = p + 0.a_1 \cdots a_n \dot{0}.$$

右端是一个以 0 为循环节的十进数。按减法定义，及关于实数的正、负，大小关系的规定

$$0 \leq \alpha - A_n = 0.\overbrace{0 \cdots 0}^{n\text{ 个}} a_{n+1} a_{n+2} \cdots \leqslant 10^{-n}.$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha - A_n) = 0. \qquad \square$$

定理 1 表达了对于“十进数叫做实数”（即定义 1）的确切理解。

至此，漏洞 1 已经被填补。还有进一步的结果。

定理 2 实数的基本列收敛。

证 设实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列。设 x_n 的十进表示为

$$x_n = p_n + 0.x_{n1} x_{n2} \cdots .$$

取 $y_n = p_n + 0.x_{n1} \cdots x_{nn}$ 它是 x_n 的十进表示截止于小数点后第 n 位所得比例数的本原表示。易见 $0 \leqslant x_n - y_n \leqslant 10^{-n}$. 所以 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是与实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价的比例数列。根据基本定理，它等价于一个基本列。根据定理 1，此基本列收敛到它对等的实数。故实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也收敛到此实数。 $\square$

定理 2 所表达的是“实数集 $\mathbb{R}$ 的**完备性**”。在这个意义上，我们说“十进数把实数表示尽了。于是 $\mathbb{R} = \{$十进数$\}$.

（五）、填漏洞2

定理 3（开方） 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}_+$. 那么存在唯一的正数 β 使得 $\beta^m = \alpha$.

证 只对 $0 < \alpha < 1$ 的情形证明就可以了。

记 $A_1 = 0.a_1 \cdots a_m$. A_1 是 α 所对等的标准列的第 m 项. 那么，很明显存在唯一一个比例数 $B_1 = 0.b_1$, $b_1 \in \mathbb{B}$ 满足 $(B_1)^m \leqslant A_1 < A_1 + 10^{-m} \leqslant (B_1 + 10^{-1})^m$. 即

$$(0.b_1)^m \leqslant 0.a_1 \cdots a_m < 0.a_1 \cdots a_m + 10^{-m} \leqslant (0.b_1 + 0.1)^m.$$

接着,记 $A_2 := 0.a_1 \cdots a_{2m}$ 是 α 所对等的标准列的第 $2m$ 项. 那么，存在唯一一个 $b_2 \in \mathbb{B}$, 使得比例数 $B_2 := 0.b_1 b_2$ 满足

$$(B_2)^m \leqslant A_2 < A_2 + 10^{-2m} \leqslant (B_2 + 10^{-2})^m.$$

一般地记 $A_k=0.a_1\cdots a_{mk},\ k\in\mathbb{N}_+$. A_k 是 α 所对等的标准列的第 mk 项. 那么，归纳地得到比例数 $B_k=0.b_1\cdots b_k,\ b_j\in\mathbb{B},\ j=1,\cdots,k$, 满足

$$(B_k)^m\leqslant A_k<(B_k+10^{-k})^m.$$

注意到 $(B_k+10^{-k})^m<(B_k)^m+10^{-k}2^m$ 得知 $\{(B_k)^m\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是两个等价的基本列. 它们收敛到同一个实数 α, 即

$$\lim_{k\to\infty}(B_k)^m=\alpha.$$

同时，由于 $0\leqslant B_{k+1}-B_k<10^{-k}$, 所以$\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是基本列.根据实数集的完备性,它收敛.记其极限为 β. 那么

$$\beta^m=\alpha.$$

□

开方运算建立之后，指数为比例数的幂运算就自然建立起来了。

定义 2 (实指数次幂) 设 $a>0$， $\alpha=p+0.a_1a_2\cdots$ 为任意实数(即十进数). 记 α 所对等的标准列的第 n 项为 α_n,($\alpha_n=p+0.a_1\cdots a_n\in\mathbb{Q}$).规定

$$a^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}a^{\alpha_n}. \tag{4}$$

称 a^{α} 为 a 的 α 次幂， a 为**底**， α 为 **指数**。

需要指出，(4) 中的数列 $\{a^{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，它必定收敛。

然后，容易验证这样定义的幂满足我们“熟知”的一切算律。

至此，漏洞 2 已经被填补。还有进一步的结果。

定理 4 若 $y>0,a>0,x\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}$, 则① $\lim\limits_{y\to a}y^x=a^x$; ② $\lim\limits_{x\to b}a^x=a^b$. ① 叫做“幂函数的连续性”； ② 叫做“指数函数的连续性”。

证 为节省篇幅，只写出② 的证明。并且为了省却细节麻烦，假定 $a>1$.这时根据幂运算的算律：$a^x-a^b=a^b(a^{x-b}-a^0)=a^b(a^{x-b}-1)$.

（六）、关于“填漏洞”的 文化现象的说明

人类用不循环数表示非比数的常识,虽已历近2千年的实践，但是到19世纪被数学家发出了理性的质疑. 几位大数学家花费了长达半个世纪的研究才把人类关于数的常识从感性的、直观的认知上升到严格的、理性的理解。做这件事的主要是Hamilton(W.R), Dedekind, Cantor, Weierstrass等. 其中Dedekind和Cantor分别创立了两种形式不同的理论(分别简称为D-理论和C-理论).

《古今数学思想》(M. Kline, 中译本，上海科技出版社，1981年第一版，第四册（第41页）如下评述这一文化现象：

“数学史上最使人惊奇的事实之一,是实数系的逻辑基础竟迟至十九世纪后叶才建立起来.”

然而，无论是D-理论还是C-理论，都离我们的常识太远了点，以至于M.Kline （见上引文献，第50至51页）评价说，“逻辑地定义出来的非比例数是一个**智慧的怪物**.”

此话的原文是“The irrational number, logically defined, is an intellectual monster”.

本文填补漏洞1 的思想来自Cantor.